Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Mathematische und didaktische Modellierung fünfdimensionaler Räume am Beispiel der Kosmologischen Relativität

Die Geometrisierung unserer Welt ist eines der entscheidenden konzeptionellen Prinzipien, die die moderne Physik nutzt, um unsere Welt beschreibbar und damit auf abstrakter Ebene fassbar zu machen. Zu diesem Zwecke muss „die Geometrie dadurch ihres nur logisch-formalen Charakters entkleidet werden, dass den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse) zugeordnet werden. [...] Die so ergänzte Geometrie ist offenbar eine Naturwissenschaft; wir können sie geradezu als den ältesten Zweig der Physik betrachten.“ (Einstein 1921, S. 5/6). Damit wirkt die Physik sehr effektiv der im 19. Jahrhundert einsetzenden „Entgeometrisierung“ (Scriba & Schreiber 2010, S. 406) entgegen.

1. Geometrisierung und Algebraisierung

Historisch ist diese „Entgeometrisierung“ der Geometrie eng mit der „Algebraisierung der Theorie der geometrischen Konstruktionen“ (Scriba & Schreiber 2010, S. 404 ff) verknüpft. Damit rückt das didaktische Problem in den Vordergrund, wie eine Geometrisierung auf Kosten der Algebraisierung und gleichzeitig eine Algebraisierung auf Kosten der Geometrisierung verhindert werden kann. Ziel der Vermittlung von Algebra und Geometrie sollte sein, diese im sich fördernden Wechselspiel und sich nicht gegenseitig kannibalisierend zu vermitteln.

Der amerikanische Physikdidaktiker David Hestenes schlägt deshalb vor, Geometrie und Algebra auf der Grundlage der konzeptionellen Ideen Graßmanns und Cliffords konstruktiv zu verknüpfen. Ein zentraler Aspekt dieses Ansatzes „to redesign mathematics“ (Hestenes 2003a, S. 119) stellt die Forderung dar, geometrische Objekte algebraisch direkt verknüpfen zu können, wobei Operationen und Operanten durch gleichartige Objekte dargestellt werden. Diese „Geometrische Algebra“ wird im Fall des dreidimensionalen Raums algebraisch durch Pauli-Matrizen aufgespannt (Hestenes 2003a), (Doran & Lasenby 2003), die geometrisch gleichwertig als Basis-Vektoren und Basis-Reflexionen (Horn 2011a, b) interpretiert werden.

2. Modellierung vierdimensionaler Räume

Im Kontext der vierdimensionalen Raumzeit existieren die Einsteinschen „erlebbaren Gegenstände der Wirklichkeit“ an – im Rahmen der Messgenauigkeit – jeweils exakt messbaren Orts- und Zeitpunkten. Raumzeitliche

Vektoren werden in der Geometrischen Algebra durch Linearkombinationen von Dirac-Matrizen (Hestenes 2003a), (Doran & Lasenby 2003) gegeben, so dass auch hier eine Zuordnung von leeren Begriffschemata (Dirac-Matrizen) zu erlebbaren Gegenständen der Wirklichkeit stattfindet. Die Dirac-Matrizen werden wieder geometrisch gleichwertig sowohl als Basis-Vektoren wie auch als Basis-Reflexionen (Horn 2011a, b) interpretiert.

Die Geometrisierung unserer vierdimensionalen Welt manifestiert sich in der relativistischen Weltbeschreibung durch eine räumliche Umdeutung von Zeitdauern. Der Zeitdauer von 1 ns entspricht dabei in etwa der Länge eines Lineals (30 cm), da Zeitdauern aufgrund der universell als gültig angenommenen Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c eindeutig den von Licht zurückgelegten Strecken und damit räumlichen Längen zugeordnet werden können. Die Zeit- oder Raumartigkeit einer solchen Länge drückt sich dann durch die jeweilige Signatur der entsprechenden Linearkombination der Basis-Vektoren mit $\gamma_t^2 = -\gamma_x^2 = -\gamma_y^2 = -\gamma_z^2 = 1$ aus.

3. Das Modell bietet zu viel Platz

Zur vollständigen Beschreibung aller geometrischen Objekte der vierdimensionalen Raumzeit sind die folgenden Basis-Objekte notwendig:

- ein Skalar als dimensionsloses Objekt,
- vier Basis-Vektoren in x-, y-, z- und (ct)-Richtung,
- sechs Basis-Bivektoren in Richtung der rein räumlichen xy-, yz- und zx-Ebenen und der raumzeitlichen x(ct), y(ct)- und z(ct)-Ebenen,
- vier Basis-Trivektoren für die dreidimensionale, rein räumliche xyz-Hyperebene und die raumzeitlichen xy(ct)-, yz(ct)- und zx(ct)-Hyperebenen,
- ein Basis-Quadrovektor für das vierdimensionale Volumen xyz(ct).

Das ergibt insgesamt $2^4 = 16$ Basis-Objekte.

Dirac-Matrizen sind jedoch komplexe (4x4)-Matrizen. Da jede Matrizenposition mit einem reellen oder aber einem imaginären Wert belegt werden kann, existieren insgesamt $2^5 = 32$ mögliche linear unabhängige (4x4)-Matrizen. Damit lassen sich fünfdimensionale Räume, die aus einem Skalar, 5 Basis-Vektoren, 10 Basis-Bivektoren, 10 Basis-Trivektoren (bzw. Pseudo-Bivektoren), 5 Basis-Quadrovektoren (bzw. Pseudo-Vektoren) und einem Basis-Pentavektor (bzw. Pseudoskalar) aufgespannt werden, beschreiben.

Die Algebra der Dirac-Matrizen ist somit geeignet, ohne konzeptionelle Probleme fünfdimensionale Räume bzw. Raumzeiten konsistent zu modellieren. Damit bietet sich die Möglichkeit, den Übergang von der vierdimensionalen Erfahrungswelt zu einer abstrakt fünfdimensionalen Welt didaktisch einfach zu bewerkstelligen. Ein solcher Brückenschlag zu höherdimensionalen Räumen ist insbesondere für die Vermittlung moderner Konzepte in der Physik wichtig, da diese Konzepte oft auf Raumzeiten höherer Dimensionen zurückgreifen.

4. Von Einstein zu Carmeli

Ein Prototyp für eine Weltbeschreibung, die aufgrund des Einbezugs einer weiteren Dimension eine geometrische Vereinheitlichung und damit eine konzeptionelle Zusammenführung zweier zuvor getrennter Konzepte schuf, stellt die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins und der darauf aufbauenden Arbeiten Minkowskis dar. Der physikalische Kern dieser Theorie basiert auf der Beobachtung, dass die Geschwindigkeit von Licht in jedem Inertialsystem gleich groß ist und diese Geschwindigkeit von materiellen Objekten nicht erreicht werden kann. Im Minkowski-Diagramm stellen die Weltlinien von Licht (siehe Abb. 1 links) somit ausgezeichnete Geraden dar.

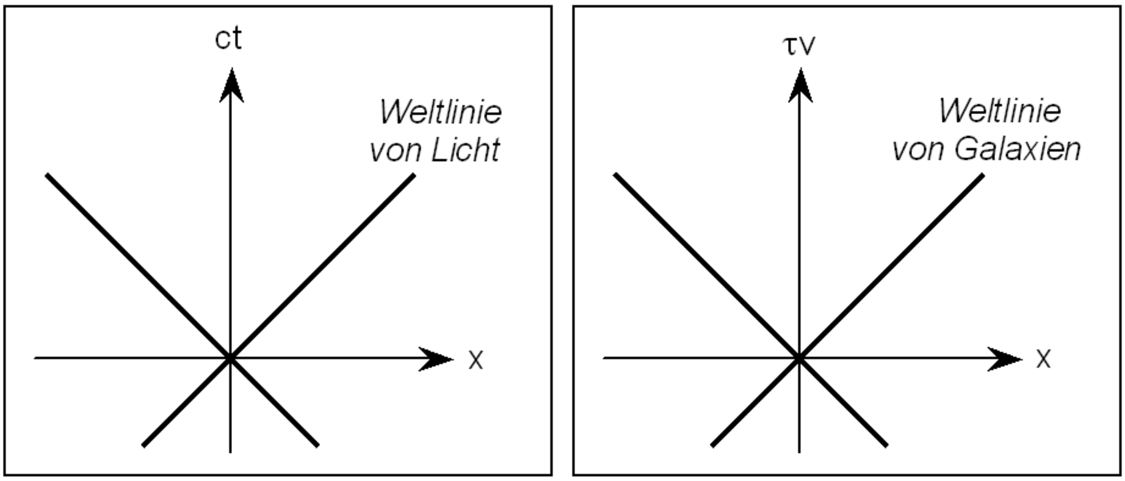

Abbildung 1: Strukturell ähnliches Verhalten von Licht (links) und von Galaxien (rechts) in unserer Welt.

Es ist erstaunlich, dass die Weltlinien von Galaxien ebenfalls strukturell ausgezeichnete Weltlinien darzustellen scheinen. Diese von Hubble erstmals beobachtete Beziehung (siehe Abb. 1 rechts) interpretiert Carmeli als ein Anzeichen für eine geometrisch fünfdimensionale Welt. Die Rolle, die die Lichtgeschwindigkeit im Kontext der Speziellen Relativitätstheorie einnimmt, nimmt im Rahmen der von Carmeli als „Kosmologische Relativität“ (Carmeli 2002) bezeichneten Hypothese das Alter des Universums τ ein: Es existiert kein Objekt in unserer Welt, das älter als die Hubble-Zeit (bzw. „big bang time“) $\tau = 1/H_0 \approx 12{,}5$ Mrd. Jahre (Carmeli 2006, S. 100) ist. Der relativistische Standpunkt, dass kein Ort gegenüber anderen Orten in unserem Universum ausgezeichnet ist, führt dann zu der Schlussfolgerung, dass eine fünfte Koordinate, die als Geschwindigkeit zu interpretieren ist, der geometrischen Struktur unserer Welt zugrunde liegt.

5. Didaktische Zugänglichkeit weiterer Dimensionen

Obgleich Carmeli eindrucksvoll zeigt, dass mit Hilfe seiner Kosmologischen Relativität die kosmische Inflation, die dunkle Materie im Rahmen der Tully-Fisher-Formel sowie die Pioneer-Anomalie erklärt werden könnten (Carmeli 2002 & 2006), ist sehr zweifelhaft, ob dieser Ansatz letztendlich physikalisch tragfähig ist, da die konventionelle Erklärung der Hubbleschen Rotverschiebung als Expansion des Universums konzeptionell ebenfalls überzeugt.

Dennoch hat die Theorie Carmelis einen hohen didaktischen Wert: sie kann als Brücke zu höherdimensionalen Theorien dienen, ohne dass gleichzeitig die Frage nach einer Kompaktifizierung zusätzlicher Dimensionen diskutiert werden muss. Dies hat den Vorteil, dass die zusätzliche Dimension der Geschwindigkeit im Kontext der Geometrischen Algebra in gänzlich natürlicher Weise eingefügt und der geschwindigkeitsartige Basis-Vektor als fünfte, zu den vier bereits gegebenen Dirac-Matrizen linear unabhängige, zusätzliche (4x4)-Matrix interpretiert werden kann.

Literatur

Carmeli, M. (2002): Cosmological Special Relativity. The Large-Scale Structure of Space, Time and Velocity. Zweite Auflage, Singapore: World Scientific.

Carmeli, M. (2006): Cosmological Relativity. The Special and General Theories for the Structure of the Universe. Singapore: World Scientific.

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Einstein, A. (1921): Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrags an der Preußischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Jan. 1921. Berlin: Springer.

Hestenes, D. (2003a): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 - 121.

Hestenes, D. (2003b): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691 - 714.

Horn, M. E. (2011a): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: H.-J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context. Basel, Berlin: Birkhäuser, S. 435 – 450.

Horn, M. E. (2011b): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: D. Höttecke (Hrsg.): Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 158 – 160.

Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2010): 5000 Jahre Geometrie. Erschienen in der Reihe: H.-W. Alten, A. Djafari Naini, H. Wesemüller-Knock: Vom Zählstein zum Computer. Dritte Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer.